Filosofia della pratica matematica: una panoramica

Silvia De Toffoli

Scuola Universitaria IUSS Pavia

ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI:
La filosofia nella matematica del '900
4 Aprile 2024

Indice

Indice

Che cos'è la filosofia della pratica matematica?

È complicato!

- Insieme eterogeneo di studi sulla matematica – questa viene intesa come un'attività umana storicamente determinata e non come un dominio di verità immutabili.
- Tra questi studi la filosofia viene a contatto con altre discipline e non solo con la matematica stessa (e.g., storia, sociologia, psicologia e didattica).
- Reazione alle correnti principali della filosofia della matematica del '900.
- Work in Progress: De Toffoli and Mancosu, "The Philosophy of Mathematical Practice," forthcoming in the *Stanford Encyclopedia of Philosophy*.

La filosofia della matematica “tradizionale” del ’900

1. Analisi dei fondamenti della matematica.
2. Domande molto generali di ontologia, semantica e epistemologia.

Fondazionalismi della prima metà del ‘900

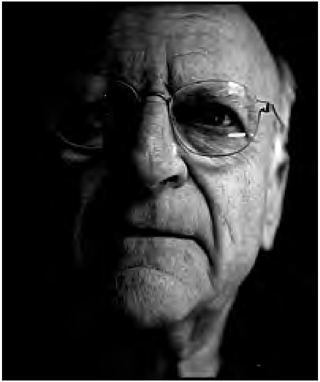
1. Logicismo (Frege)
2. Intuizionismo (Brower)
3. Formalismo (Hilbert)

- Sguardo verso l’interno.
- I vari movimenti non sono riusciti a ottenere i risultati sperati. Ci sono nuove versioni, ma più modeste.
- Lo sviluppo di posizioni fondazionaliste spesso richiede una profonda comprensione di aspetti importanti della pratica matematica.

Questioni (troppo) generali: la seconda metà del ‘900

- La filosofia analitica della matematica si è focalizzata sul il ruolo e l’indispensabilità della matematica nelle scienze empiriche per affrontare questioni generali sull’esistenza di oggetti astratti, la loro natura e la nostra conoscenza di essa.
- Sguardo verso l’esterno.
- Uno dei temi principali è il dibattito tra platonisti e nominalisti.
- Per affrontare queste questioni, non è necessario tenere in considerazione matematica sofisticata.

Due articoli



1. **Benacerraf, "What Numbers Could Not Be," 1965**
   Partendo dal presupposto che la matematica si possa ridurre alla teoria degli insiemi, quali insiemi corrispondono agli oggetti matematici? $\to$ Problema di indeterminazione.
2. **Benacerraf, "Mathematical Truth," 1973**
   Se la matematica tratta di oggetti astratti, cioè di oggetti che non hanno una collozazione spaziale o temporale, come possiamo avere conoscenza di tali oggetti?

Riduzionismi

- Si parte dal presupposto che la matematica possa essere ridotta alla teoria degli insiemi.
- Anche a livello dei problemi di applicabilità, tutto si riduce ad insiemi.
- Inoltre, per rispondere a domande generali sulla conoscenza in matematica, non si tratta di conoscere la matematica come viene praticata dai matematici, ma basta considerare matematica elementare.

Idealizzazioni

The problem is that set-theoretic idealisation idealises too much. Mathematical thought is messy. When we dig beneath the neatly composed surface we find a great buzzing, blooming confusion of ideas, and we have a lot to learn about how mathematics channels these wellsprings of creativity into rigorous scientific discourse. But that requires doing hard work and getting our hands dirty. And so the call of the sirens is pleasant and enticing: mathematics is set theory! Just tell us a really good story about abstract objects, and the secrets of the Universe will be unlocked. The siren song has held the philosophy of mathematics in thrall, leaving it to drift into the rocky shores. (Avigad 2019)

C'è bisogno di una riforma!

Altri approcci e altre domande

Ci sono varie motivazioni per allargare i temi di studio:

- Difficoltà con i progetti fondazionalisti / fondamenti alternativi.
- **Il passato**: l'importanza della storia della matematica.
- **Il presente**: cosa fanno i matematici al lavoro? Come la insegnano? Che strumenti notazionali usano?
- **Il futuro**: come sta cambiando la matematica grazie alle nuove tecnologie?

Filosofia della pratica matematica

- Gruppo di approcci interdisciplinari che emergono dalla volontà di estendere il programma di ricerca della filosofia della matematica.
- La matematica è praticata da persone in carne ed ossa in un preciso contesto storico.
- Ambiguità nel termine "pratica": prodotto o processo?
  - Prodotto: il precipitato di un'attività. E.g., studi sulla spiegazione matematica, su diverse dimostrazioni, etc.
  - Processo: l'attività stessa – approcci più legati alla psicologia, storia e sociologia.

L'epistemologia della matematica

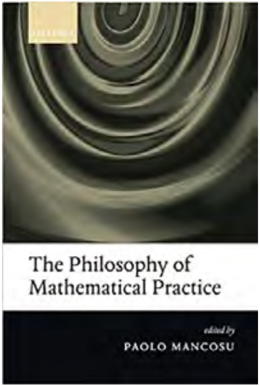
[The authors in this collection] believe that the epistemology of mathematics needs to be extended well beyond its present confines to address epistemological issues having to do with fruitfulness, evidence, visualization, diagrammatic reasoning, understanding, explanation, and other aspects of mathematical epistemology which are orthogonal to the problem of access to 'abstract objects'.

Mancosu, The Philosophy of Mathematical Practice (2008).

La filosofia della pratica matematica

Certain philosophical problems become salient only when the appropriate area of mathematics is taken into consideration. (ibid.)

- Si affrontano nuovi problemi: la formazione di concetti, l'uso di strumenti tecnici, etc.
- Interesse per la storia della matematica.



L'analisi della pratica può contribuire a dibattiti tradizionali arricchendo la nostra concezione di cosa sia una dimostrazione e di come si ottenga la giustificazione e la conoscenza in matematica.

Approccio anti-fondazionalista

I primi filosofi della pratica matematica hanno rifiutato in maniera esplicita e spesso polemica la filosofia della matematica tradizionale.

- **Lakatos** (1976) si oppone esplicitamente a una visione "deduttivista" della matematica.
- **Tymoczko** (1986) e **Aspray e Kitcher** (1988) vedono negli approcci fondazionalisti il loro obiettivo primario.
- **Corfield** (2003) continua la tradizione di Lakatos e parla di smantellamento del "filtro fondazionalista".
- **Cellucci** (2006) scrive del "rifiuto" della visione dominante in filosofia della matematica che considera la giustificazione della matematica, e non la scoperta matematica, come il suo problema principale.

Approccio ecumenico

Viene enfatizzata la complementarietà con altri approcci.

La posizione ecumenica non si oppone agli sforzi fondazionalisti. Li considera contributi preziosi alla filosofia della matematica, riconoscendo allo stesso tempo anche che ci sono altre importanti questioni da affrontare. Questa posizione è ben esemplificata dal volume "La filosofia della pratica matematica" curato da Paolo Mancosu (2008).

Importanti collegamenti con:

- la storia della matematica,
- la comunicazione della matematica e
- la didattica della matematica.

Temi

Tra i temi che hanno ricevuto più attenzione ci sono:

- Relazione tra dimostrazioni formali e informali
- Notazioni matematiche
- Visualizzazione e diagrammi
- Euristica e matematica sperimentale
- Valori in matematica:
  - Spiegazione
  - Bellezza
  - Purezza
  - Semplicità
  - ...

Temi

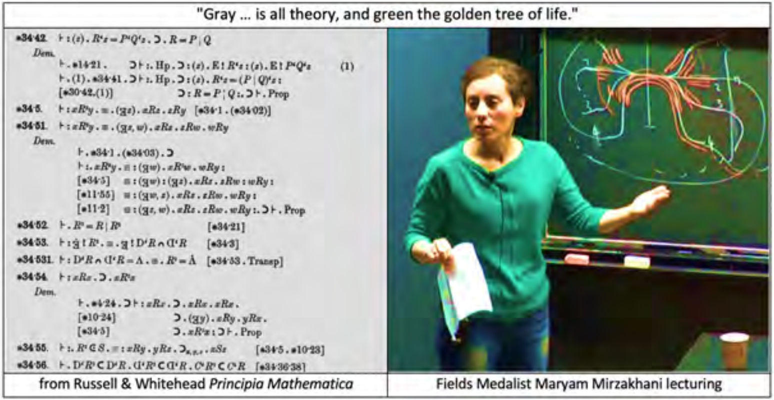
Tra i temi che hanno ricevuto più attenzione ci sono:

- **Relazione tra dimostrazioni formali e informali**
- Notazioni matematiche
- **Visualizzazione e diagrammi**
- Euristica e matematica sperimentale
- Valori in matematica:
  - Spiegazione
  - Bellezza
  - Purezza
  - Semplicità
  - ...

Indice

Indice

Dimostrazioni formali e dimostrazioni informali



È indiscusso che esista una relazione tra dimostrazioni formali e dimostrazioni informali.

Il problema è capire di che relazione si tratti.

Dimostrazioni formali e informali

- Non abbiamo a disposizione molte dimostrazioni formali.
- Nonostante la loro differenza, ci deve essere un legame tra dimostrazioni formali e dimostrazioni informali.
- Nel 1963 Cohen ha dimostrato che CH è indipendente da ZFC.
  - È chiaro che un matematico perderebbe solo tempo a cercare di dimostrare CH!
  - L'esistenza di una dimostrazione formale è una condizione necessaria per l'esistenza di una dimostrazione informale.
- È in corso un dibattito piuttosto acceso riguardo a come concepire questo legame.

Rigore

Come definire il rigore matematico?

- Una dimostrazione è rigorosa se, con aiuto di un logico, un matematico potrebbe trasformarla in una dimostrazione formale. Il logico è come una levatrice socratica (Steiner 1975).
- Una dimostrazione è rigorosa se contiene abbastanza dettagli per convincere (per le ragioni giuste) il pubblico appropriato che esista una dimostrazione formale (Burgess 2015).
  - Ma chi è l'audience? E quanti dettagli bastano?

Rigore e intuizione

proofs are written in a way to make them easily understood by mathematicians. Routine logical steps are omitted. An enormous amount of context is assumed on the part of the reader. (Hales, 2008)

1. Le dimostrazioni sono destinate a un pubblico preciso.
   - Verificare la loro correttezza non è un compito facile o automatico e la capacità dei matematici di riconoscere se un argomento è una dimostrazione corretta non è infallibile.
2. I *criteri di accettabilità* delle dimostrazioni dipendono dal contesto.
   - Dipendono da ciò che condividono le comunità matematiche: conoscenze di base, sapere pratico e risorse rappresentazionali.

Criteri di accettabilità

Il modo in cui controlliamo la correttezza delle dimostrazioni informali è più variegato rispetto a quello usato per le dimostrazioni formali. Infatti, non può essere esplicitato senza entrare nei dettagli dei vari casi.

- Certe inferenze di alto livello possono essere comprese senza riferimento a passaggi formali.
- Per esempio, certi usi dell'intuizione spazio-temporale sono accettabili in pratica... ma non tutti.

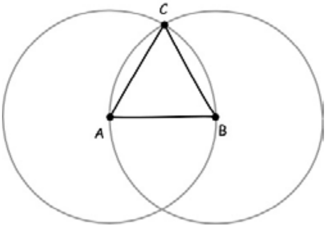
La crisi dell'intuizione

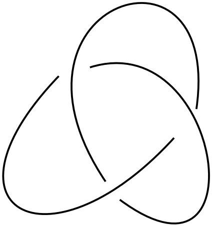
had we relied on intuition in this instance, we should have remained in error, for intuition seems to force the conclusion that there cannot be curves lacking a tangent at any point. (Hahn, 1933)

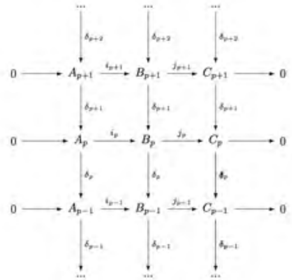
Indice

Indice

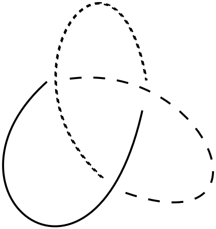
Diagrammi







Diagrammi



Proofs, especially in topology and geometry, rely on intuitive arguments in situations where a trained mathematician would be capable of translating those intuitive arguments into a more rigorous argument. (Hales, 2008)

Manipolare i diagrammi, che sono delle rappresentazioni esterne concrete, permette di ottenere delle informazioni sulle strutture matematiche astratte.

I diagrammi nella matematica del '900

Uno studio quantitativo di Mikkel Willum Johansen e Josefine Lomholt Pallavicini (2022) si è focalizzato sull'analisi dei diagrammi in alcune delle principali riviste matematiche dal 1885 al 2015.

Tre periodi:

1. Fino al 1910: presenza di diagrammi geometrici e topologici.
2. Dal 1910 al 1950: assenza di diagrammi.
3. Dal 1950: presenza di diagrammi algebrici.

Il bando dei diagrammi

Il bando dei diagrammi che fu attuato dopo la crisi dell'intuizione è parzialmente ingiustificato:

1. Certi diagrammi sfruttano l'intuizione in modo rigoroso:
   - Diagrammi di nodi
   - Rappresentazioni topologiche
   - Diagrammi di Venn
   - La lingua grafica delle categorie monoidali

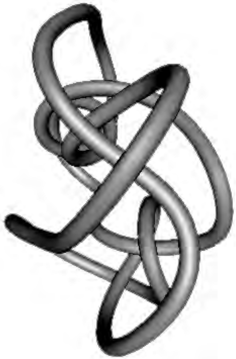
2. Altri non usano neanche l'intuizione!
   - Diagrammi commutativi in algebra omologica
   - Diagrammi commutativi in teoria delle categorie

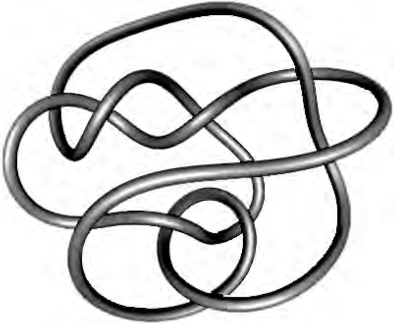
...Der Geometer, der von der Anschauung ausgeht.

Felix Klein (1892) ha suggerito che ogni dipartimento di matematica dovrebbe avere almeno un professore per ognuno di questi tipi di matematici:

- il filosofo, che pensa con concetti,
- l'analista, che essenzialmente manipola formule,
- il geometra, il cui punto di partenza è l'intuizione.

Illustrazioni e diagrammi: il caso dei nodi



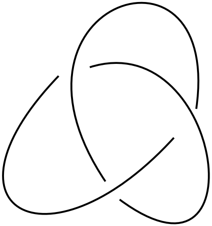


Dalle illustrazioni ai **diagrammi**

I diagrammi sono rappresentazioni più controllate nelle quali le caratteristiche costitutive sono chiaramente identificabili.

Per ottenere un *diagramma di un nodo* bisogna:

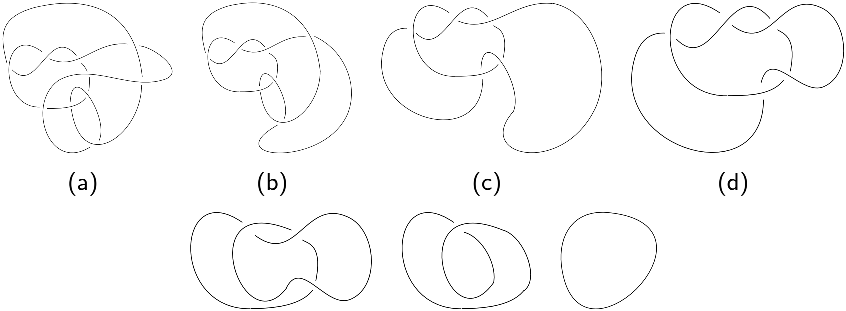
- *Proiettare* il nodo in una superficie mantenendo le informazioni nei punti di intersezione (punti singolari).
- Assicurarsi che la proiezione sia *regolare*: i punti di intersezione devono essere trasversali e devono contenere solo due fili.



Klein: Intuizione naive e intuizione raffinata

- **L'intuizione naive è innata ma si sviluppa con l'esperienza:** *Le esperienze meccaniche, come quella che abbiamo nella manipolazione dei corpi solidi, contribuiscono a formare le nostre ordinarie intuizioni metriche, mentre le esperienze ottiche con raggi di luce e ombre sono responsabili dello sviluppo di un'intuizione "proiettiva".*
- **L'intuizione raffinata si sviluppa con l'apprendimento della matematica:** *È l'intuizione raffinata che troviamo in Euclide; sviluppa attentamente il suo sistema sulla base di assiomi ben formulati, è pienamente consapevole della necessità di dimostrazioni esatte, distingue chiaramente tra il commensurabile e l'incommensurabile, e così via.*

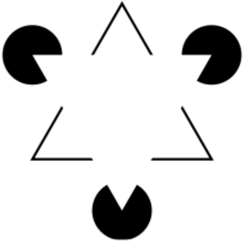
Snodare il nodo



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g)

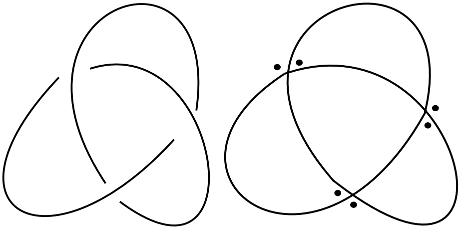
Una buona convenzione

L'interruzione nelle linee suggerisce tridimensionalità.
Le leggi di raggruppamento visive sono state investigate dalla *Gestaltpsychologie*. Un fenomeno simile avviene nel triangolo di Kanizsa:



Una buona convenzione

Questa è solo una convenzione, altre scelte sono possibili:



Immaginazione manipolativa

I diagrammi di nodi ci permettono di utilizzare un'intuizione raffinata, compatibile con il rigore delle dimostrazioni.
Non si tratta solo di visione, ma anche di immaginazione spazio-motoria (De Toffoli e Giardino, 2014).

E' più della semplice visione:

1. Sfrutta delle abilità innate ma viene raffinata con l'esercizio.
2. Non si tratta solo di rappresentazioni ma di azioni (manipolazione di diagrammi).

Affidabilità

Le manipolazioni attuate sui diagrammi di nodi corrispondono a una serie di mosse di Reidemeister.
Vengono riconosciute direttamente come delle manipolazioni che non alterano il tipo di nodo rappresentato.

- Immaginare trasformazioni in 3 dimensioni è rilevante dal punto di vista epistemologico: se immaginiamo in maniera scorretta otteniamo un risultato sbagliato.
- Anche se l'intuizione è connessa ad operazioni matematiche precise, non è dispensabile.
- Gli argomenti basati sui diagrammi e l'intuizione sono spesso maneggiabili dal punto di vista cognitivo.
- Ma non tutti i diagrammi sono geometrici o topologici.

La caccia al diagramma

Lemma (La versione forte del lemma dei 5)

Il seguente diagramma di gruppi abeliani è commutativo e le sue righe sono esatte. Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva. Simmetricamente, se f_2 e f_4 sono iniettive, e f_1 è suriettiva, allora f_3 è iniettiva.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b_3 & &
\end{tikzcd}
$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b_3 \arrow[r, dotted] & b_4 &
\end{tikzcd}
$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$\begin{tikzcd}
 & & & a_4 & \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b_3 \arrow[r, dotted] & b_4 \arrow[uuu, dotted, bend right] &
\end{tikzcd}$$

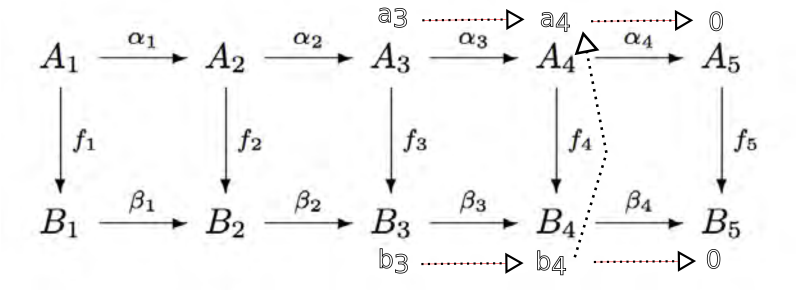
Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$\begin{tikzcd}
 & & & a_4 & \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b_3 \arrow[r, dotted] & b_4 \arrow[r, dotted] \arrow[uuu, dotted, bend right] & 0
\end{tikzcd}$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & a_4 \arrow[r, dotted] & 0 \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b_3 \arrow[r, dotted] & b_4 \arrow[r, dotted] \arrow[uuu, dotted, bend right] & 0
\end{tikzcd}
$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.



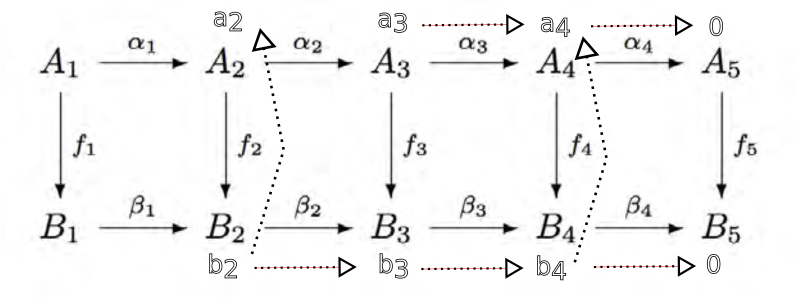
Supponiamo che $f_3(a_3) = b'_3$, allora $\beta_3(b_3) - \beta_3(b'_3) = b_4 - b_4 = 0$.
Assumiamo: $\beta_3(b_3) = 0$ (abbiamo solo sottratto un elemento con una preimmagine in A_3).

$$\begin{tikzcd}
 & & a_3 \arrow[r, dotted] & a_4 \arrow[r, dotted] & 0 \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & & b_3 \arrow[r, dotted] & b_4 \arrow[r, dotted] \arrow[uuu, dotted, bend right] & 0
\end{tikzcd}$$

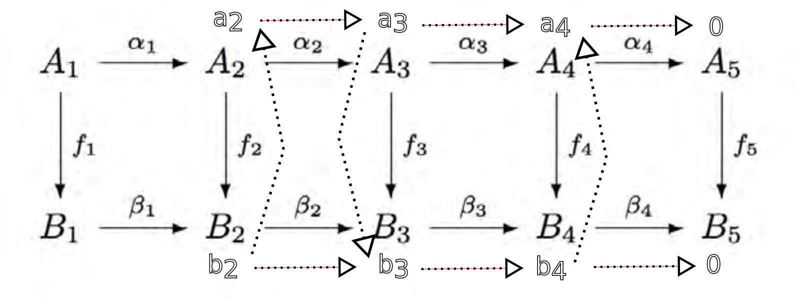
Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.

$$
\begin{tikzcd}
 & & a3 \arrow[r, dotted] & a4 \arrow[r, dotted] & 0 \\
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5 \\
 & b2 \arrow[r, dotted] & b3 \arrow[r, dotted] & b4 \arrow[r, dotted] \arrow[uuu, dotted, bend right] & 0
\end{tikzcd}
$$

Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.



Proveremo la prima parte del lemma: Se f_2 e f_4 sono suriettive e f_5 è iniettiva, allora f_3 è suriettiva.



L'uso dei diagrammi commutativi

- I diagrammi commutativi non presentano i problemi sollevati dai diagrammi topologici.
- Non c'è uso di intuizione spazio-temporale.
- È semplice vedere come potrebbero essere eliminati.
  - Però la nostra comprensione della dimostrazione ne sarebbe compromessa!
  - Il fatto che questi diagrammi siano facilmente codificabili non implica che siano dispensabili.

L'essenzialità dei diagrammi

- I diagrammi (sia diagrammi di nodi che diagrammi commutativi) possono essere convertiti in codici ma il ragionamento in gioco cambierebbe radicalmente.
- Se i diagrammi sono essenziali o meno in una dimostrazione dipende da come le dimostrazioni vengono individuate.

Come individuare le dimostrazioni?

> *Usually mathematicians are happy to regard two presentations as presenting the same proof if the central idea is the same in both cases. But if one's main concern is with what is involved in thinking through a proof, its central idea is not enough to individuate it: the overall structure, the sequence of steps and perhaps other factors affecting the cognitive processes involved will be relevant. (Giaquinto, 2007)*

Esempi:

1. La dimostrazione di Euclide dell'esistenza di infiniti numeri primi
2. Le dimostrazioni che contengono lemmi
3. Piccoli cambi di notazioni

Non ci sono criteri di identità per le dimostrazioni che siano indipendenti dal contesto. Dipende da cosa ci interessa!

Il ragionamento in gioco

Se individuiamo le dimostrazioni in un modo che sia sensibile al particolare tipo di ragionamento che serve per capirle, allora convertire una dimostrazione topologica che include diagrammi in una dimostrazione senza diagrammi trasformerebbe la dimostrazione originale in una dimostrazione diversa.

- Ciò non vuol dire che le dimostrazioni non possano essere "convertite"; ma che la conversione non preservi il ragionamento diagrammatico.
- Anche per le dimostrazioni che contengono diagrammi dei nodi, è abbastanza semplice ottenere una dimostrazione puramente simbolica.
- Ciò è ancora più semplice per le dimostrazioni che contengono diagrammi commutativi.

Indice

Indice

Filosofia della pratica matematica

- La filosofia tradizionale della matematica del '900 ha ignorato questioni legate alla pratica matematica. Si è focalizzata soprattutto su 1) questioni fondazionali e 2) questioni generali di ontologia, semantica e epistemologia.
- Altre questioni filosofiche emergono naturalmente dalla pratica matematica.
- Tra queste, ci sono questioni riguardanti le notazioni matematiche, e in particolare le notazioni diagrammatiche.
- È interessante capire perché i diagrammi sono scomparsi dalle riviste matematiche attorno al 1910 per poi riapparire solo attorno al 1950.

Dimostrazioni informali

Nonostante il rapido sviluppo di nuove tecnologie, la matematica contemporanea non è generalmente formalizzata.

- Spesso una dimostrazione viene accettata perché viene riconosciuta corretta (e.g., sappiamo che in certe circostanze la visualizzazione funziona) e solo dopo inferiamo che sia formalizzabile.
  $\rightarrow$ Cambio dell'ordine di spiegazione.
- Le dimostrazioni contengono notazioni eterogenee e anche diagrammatiche.

Rigore e diagrammi

- Gli standard di accettabilità delle dimostrazioni dipendono dal background condiviso del pubblico a cui la dimostrazione è indirizzata.
- L'uso di diagrammi è conciliabile con il rigore matematico:
  1. Certi diagrammi sfruttano un'intuizione raffinata.
  2. Altri diagrammi non invocano nessun tipo di intuizione spazio-temporale.
- Il bando sui diagrammi è parzialmente non motivato.

Dimostrazioni e diagrammi

- Le dimostrazioni possono essere identificate in modi diversi.
- C'è un modo plausibile per individuare le dimostrazioni matematiche tale che in certe dimostrazioni diagrammatiche rimpiazzare i diagrammi con rappresentazioni linguistiche non porta a una presentazione diversa della stessa dimostrazione, ma proprio a una dimostrazione diversa.
- I diagrammi sono quindi essenziali a certe dimostrazioni!

Alg.

- $F = P \circ N \circ (M \otimes id_C)$

-
$$
\begin{tikzcd}
A \otimes C \arrow[r, "F"] \arrow[d, "M \otimes id_C"'] & E \\
B \otimes C \arrow[r, "N"] & D \arrow[u, "P"']
\end{tikzcd}
$$

Graphical

Grazie per l'attenzione!