La matematica diventa grande

Carlo Toffalori

La filosofia nella matematica del '900

Centro Interdisciplinare B. Segre, Accademia dei Lincei

Roma, 4-5 aprile 2024

China sul mio problema,
Un altro problema arriva –
Più grande del mio – più sereno –
Coinvolgendo somme più maestose.

Controllo la mia matita indaffarata –
Le cifre scorrono via –
Perché, mie dita confuse
La vostra incertezza?

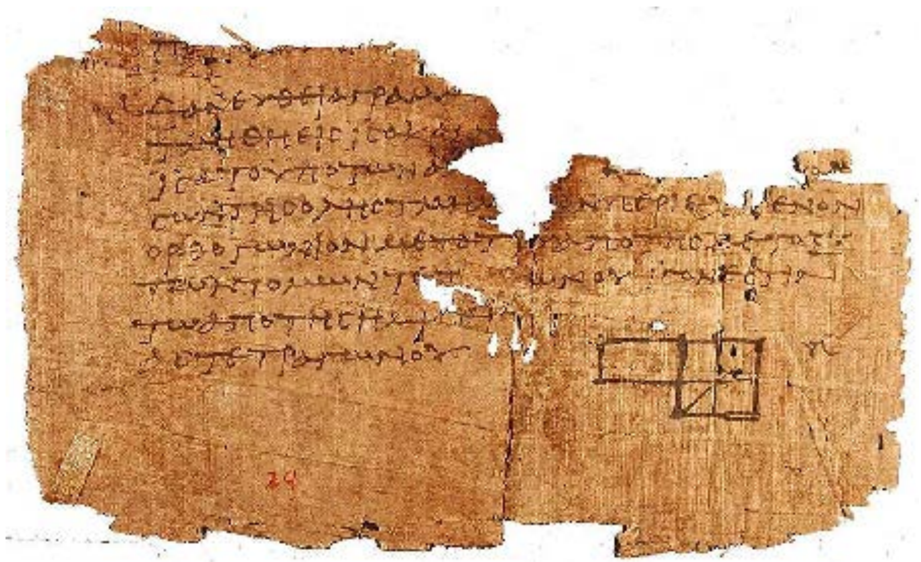
Emily Dickinson (1830-1886), poesia del 1863

Due interrogativi per ogni adolescente:

- chi sono?
- che cosa voglio fare da grande?

Validi anche per la Matematica

- ma nel suo caso nascono a fine Ottocento/inizio Novecento,
- quando la Matematica è già “vecchia” di millenni



Geometria: gli *Elementi* di Euclide, un modello classico e apparentemente insuperabile per ogni scienza

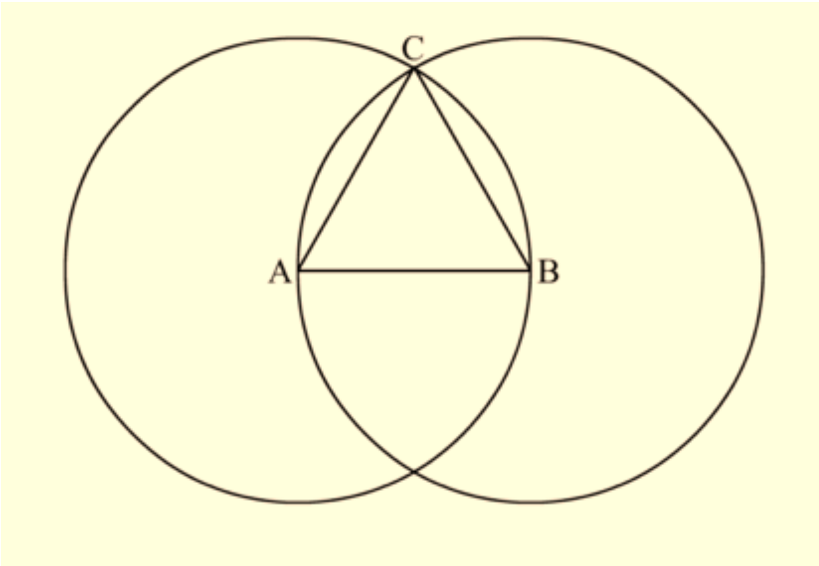
- ***postulati*** (***assiomi***) dettati dall'***evidenza***,
- ***teoremi*** raggiunti col ***ragionamento*** (per esempio, con la ***dimostrazione per assurdo***)

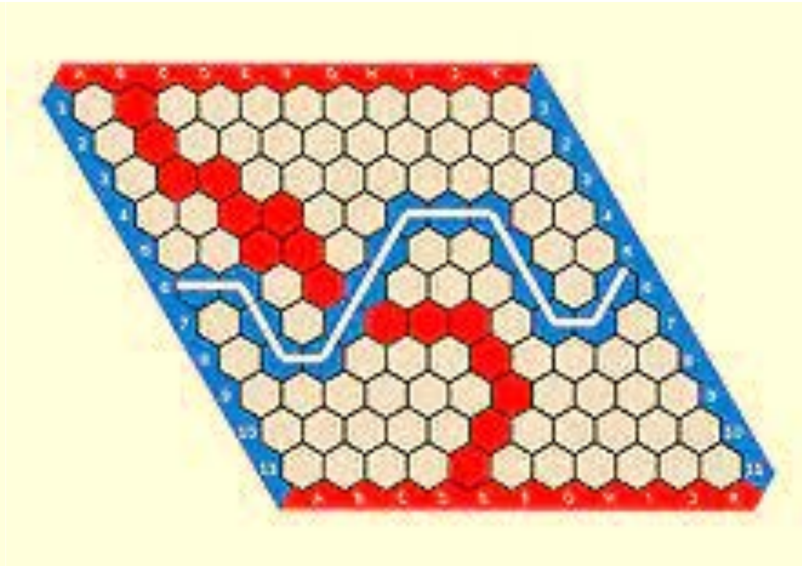
Quindi una sintesi di evidenza e ragionamento. I teoremi svelano la verità

Eppure… Bertrand Russell, *The teaching of Euclid*, 1902: *"Il valore dell'opera di Euclide come capolavoro della logica è stato grossolanamente esagerato"*

Qualche dubbio sugli assiomi: il quinto postulato sulle parallele (e, da inizio Ottocento, le ***geometrie non euclidee***)

Qualche fallacia nelle dimostrazioni: già nella Proposizione 1 del libro 1 degli *Elementi*, sulla costruzione di un triangolo equilatero di lato assegnato AB



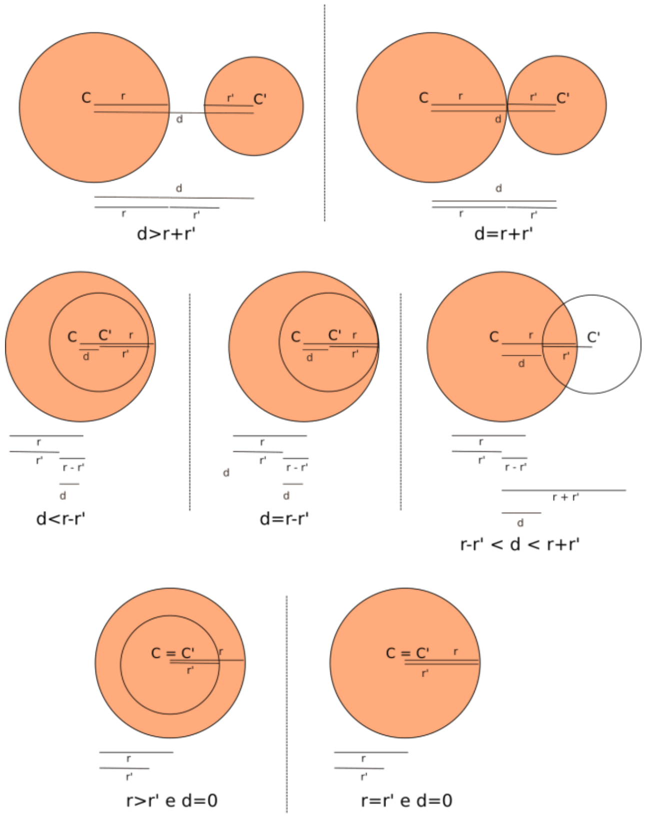


Serve un altro assioma…

Assioma di continuità circolare. Se una circonferenza ha un punto all'interno e un altro all'esterno di un'altra circonferenza, allora le due circonferenze si incontrano in due punti.

Teorema. Se due circonferenze di raggi rispettivamente $r \geq r'$ hanno centri a distanza d tale che $r - r' < d < r + r'$, allora si incontrano in due punti distinti.

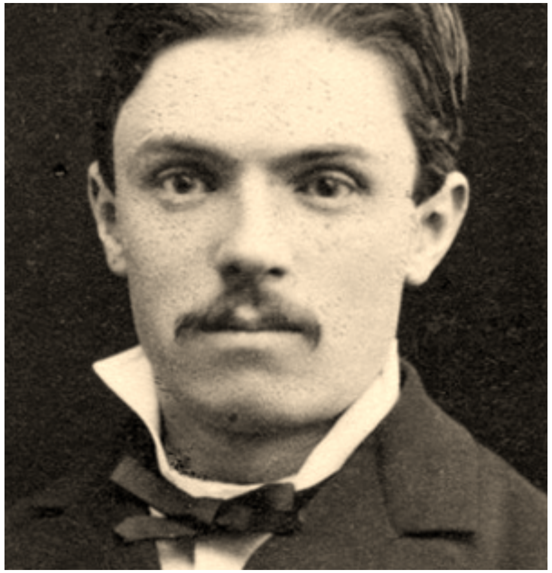
Nella Proposizione 1 di Euclide, $r = r' = d$ e $0 < r < 2r$.



David Hilbert (1862-1943), *I fondamenti della geometria*, 1899: una sistemazione astratta e scientificamente “inappuntabile”.

Tuttavia forti critiche da Henri Poincaré (1854-1912)

- *“Chi non avesse mai visto punti, rette e piani, potrebbe fare geometria non meno bene di noi”*
- *“Resta inteso che per dimostrare un teorema non è necessario, e nemmeno utile, sapere ciò che esso vuole dire.”*



Aritmetica: il numero di Pitagora, ancora gli *Elementi* di Euclide (libri 7-9)

- *Unità* è ciò in virtù del quale ognuno degli enti è detto uno
- *Numero* è una molteplicità composta di unità

Teoremi raffinatissimi

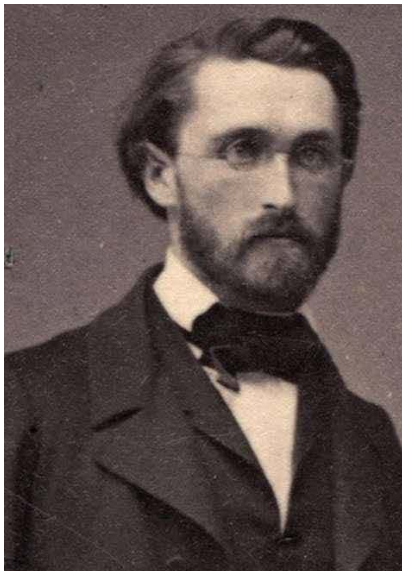
- dall'***infinità dei primi***, Euclide (*Elementi*, libro 9, proposizione 20), …
- … al ***teorema dei numeri primi***, Jacques Hadamard – Charles De La Vallée Poussin, 1896, e oltre…

Carl Friedrich Gauss: la teoria dei numeri *"regina della matematica"*

Eppure…

Solo nella seconda metà dell’Ottocento sorge l’esigenza di assicurare ai numeri naturali e alla loro aritmetica un’introduzione rigorosa, che stabilisca in particolare il ruolo del ***principio di induzione*** (un insieme di naturali che contiene 0 e si preserva aggiungendo 1 coincide con l’insieme di tutti i naturali).

- ***Richard Dedekind*** (1831-1916), *Was sind und was sollen die Zahlen?*, ovvero *Che cosa sono e a che servono i numeri?* (1888)
- Soprattutto ***Giuseppe Peano*** (1858-1932)**,** *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, ovvero *I principi dell’aritmetica proposti con un nuovo metodo* (1889)



L’assiomatizzazione di Peano basata su tre concetti base: uno (1), successore e uguaglianza. Addizione e moltiplicazione si definiscono poi su questa base, usando il principio di induzione.

§ 1. De numeris et de additione.

Explicationes.

Signo N significatur *numerus (integer positivus).*
» 1 » *unitas.*
» $a+1$ » *sequens a,* sive *a plus* 1.
» = » *est aequalis.* Hoc ut novum signum considerandum est, etsi logicae signi figuram habeat.

Axiomata.

1. $1 \epsilon \mathrm{N}.$
2. $a \epsilon \mathrm{N} . \supset . a = a.$
3. $a, b, c \epsilon \mathrm{N} . \supset : a = b . = . b = a.$
4. $a, b \epsilon \mathrm{N} . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c.$
5. $a = b . b \epsilon \mathrm{N} : \supset . a \epsilon \mathrm{N}.$
6. $a \epsilon \mathrm{N} . \supset . a + 1 \epsilon \mathrm{N}.$
7. $a, b \epsilon \mathrm{N} . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8. $a \epsilon \mathrm{N} . \supset . a + 1 - = 1.$
9. $k \epsilon \mathrm{K} \therefore 1 \epsilon k \therefore x \epsilon \mathrm{N} . x \epsilon k : \supset_x . x + 1 \epsilon k :: \supset . \mathrm{N} \supset k.$

- Cinque assiomi chiave (1 e 6-9), di cui il 9 è il ***principio di induzione***
- Dedekind: gli assiomi definiscono i numeri naturali (rispetto ai concetti di 1 e successore) “a meno di isomorfismi”.
- Poincaré, *La scienza e l’ipotesi* (1902): l’induzione (*récurrence*) è *“il ragionamento matematico per eccellenza”*

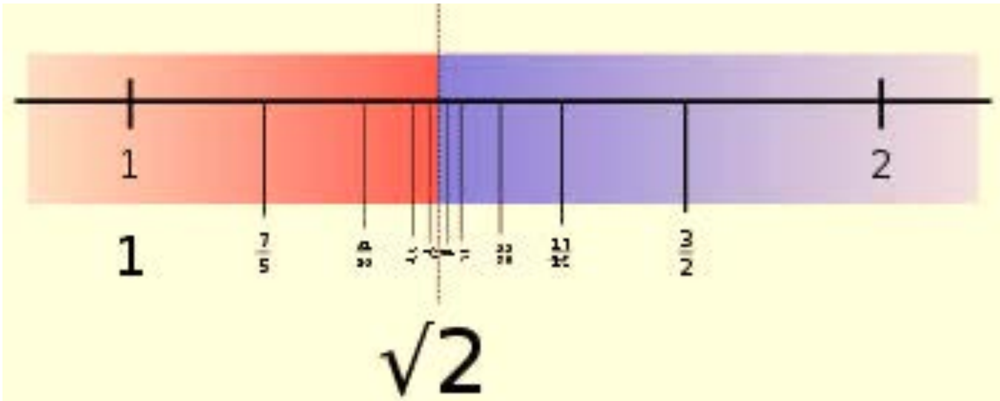
Altri universi numerici: dai numeri naturali a

- ***numeri interi***, per esempio – 2 da $x + 2 = 0$
- ***numeri razionali***, per esempio $\frac{3}{2}$ da $2x = 3$
- ***numeri reali irrazionali***, per esempio,
  - $\sqrt{2}$, il numero aureo $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Platone, *Menone*, *Teeteto*, *Epinomide*), rispettivamente da $x^2 = 2$ e $x^2 = 1 + x$
  - π (Archimede) per tutt'altri motivi,
- ***numeri complessi***, per esempio i da $x^2 + 1 = 0$

La definizione dei numeri reali, 1872

- Karl Weierstrass (1815-1897), Edward Heine (1821-1881), Charles Méray (1935-1911)
- Georg Cantor (1845-1917)
- Richard Dedekind

Cantor (1874) nessuna corrispondenza biunivoca possibile tra numeri naturali e numeri reali (al contrario di interi e razionali).



L'assioma di continuità di Dedekind: se l'insieme dei punti di una retta si decompone nell'unione disgiunta di due sottoinsiemi non vuoti tali che nessun punto dell'uno sta tra due punti dell'altro, allora c'è un unico punto O della retta tale che uno dei due sottoinsiemi è una semiretta di origine O e l'altro il suo complemento.

L’assioma di continuità di Dedekind implica l’assioma di continuità circolare.

Punti di una retta e numeri reali…

Assioma di completezza: ogni insieme di reali superiormente limitato ha tra i reali un minimo confine superiore

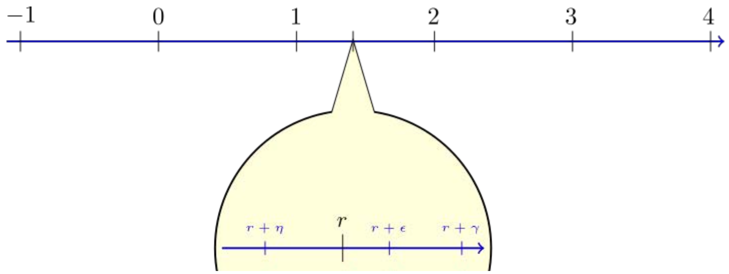
La caratterizzazione dei reali: “a meno di isomorfismi” formano l’unico campo ordinato *“completo”* (Hilbert? Dedekind? Edward Huntington, *Complete sets of postulates for the theory of real quantities*, 1902-03)

L'ostilità di Leopold Kronecker

Convegno a Berlino, 1886: *"Dio creò i numeri interi, tutto il resto è opera dell'uomo"*

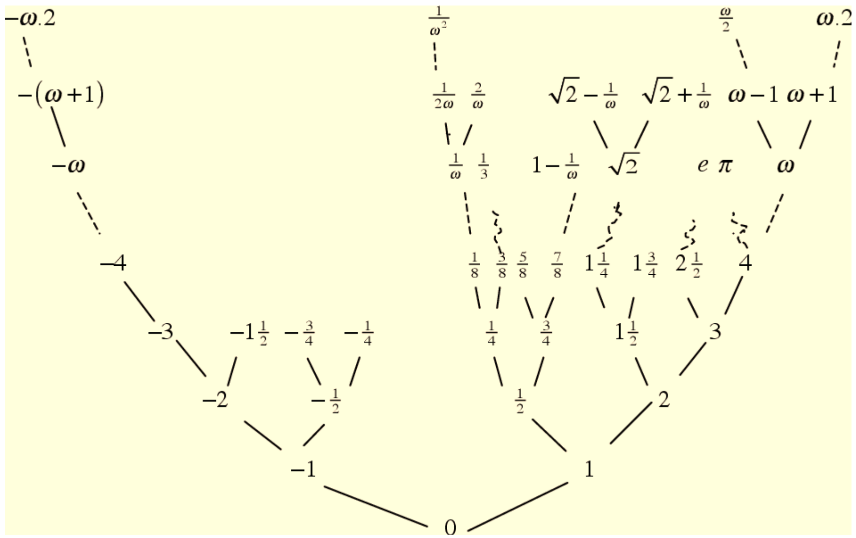
Due chiavi opposte per interpretare matematicamente il mondo e i suoi fenomeni

- il ***discreto*** (dominato dai numeri naturali)
- il ***continuo*** (dominato dai numeri reali)



Per converso, oltre i numeri reali,

- l'***analisi non standard*** di Abraham Robinson (1918-1974), nello spirito degli infinitesimi di Leibniz (1966): non più un unico O nell'assioma di Dedekind
- i ***numeri surreali*** di John Conway (1937-2020), che inglobano reali e ordinali, 1974



Appunto: l’***infinito***, un’idea che stimola l’intelletto ma non si trova in natura (Hilbert)

- Galileo Galilei (1564-1642) e il suo paradosso sui quadrati, *Discorsi e dimostrazioni matematiche rispetto a due nuove scienze*, 1638: una corrispondenza biunivoca tra i numeri naturali e i loro quadrati…
- Bernard Bolzano, *I paradossi dell’infinito*, 1851 (postuma)

Soprattutto Georg Cantor

Come contare all’infinito?

Una semplice osservazione: due insiemi finiti hanno lo stesso numero di elementi se e solo se sono in corrispondenza biunivoca tra loro.

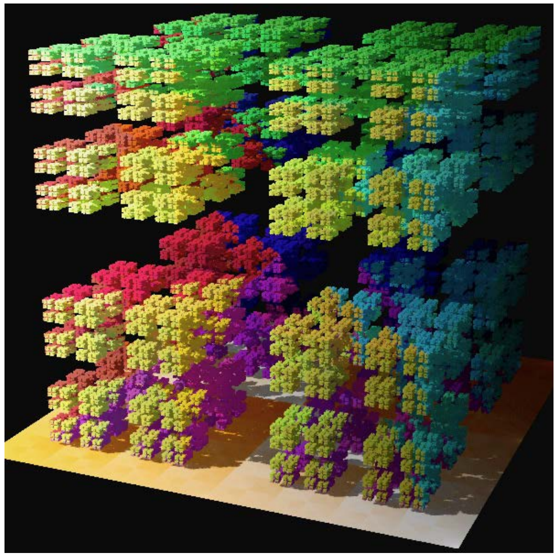
Su questa base: la definizione delle cardinalità infinite

Anzi, la scoperta di un'infinitudine di cardinalità infinite

- $\aleph_0$, il ***numerabile*** = la cardinalità dell'insieme dei numeri naturali, e di tutti gli insiemi che gli sono in corrispondenza biunivoca
- $2^{\aleph_0}$, il ***continuo*** = la cardinalità dell'insieme dei numeri reali, e di tutti gli insiemi che gli sono in corrispondenza biunivoca (come i numeri complessi).

Cantor, 1874: il continuo è diverso dal numerabile, e "più grande".

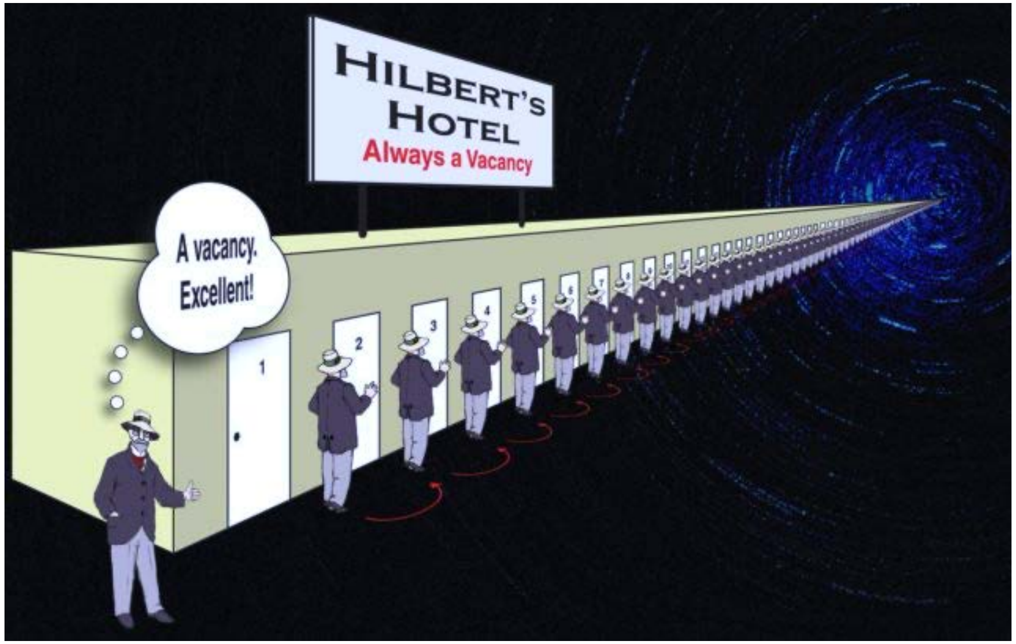
Cantor, 1891: in generale, per ogni insieme A, la cardinalità dell'insieme delle parti di A è diversa e "più grande" rispetto a quella di A.

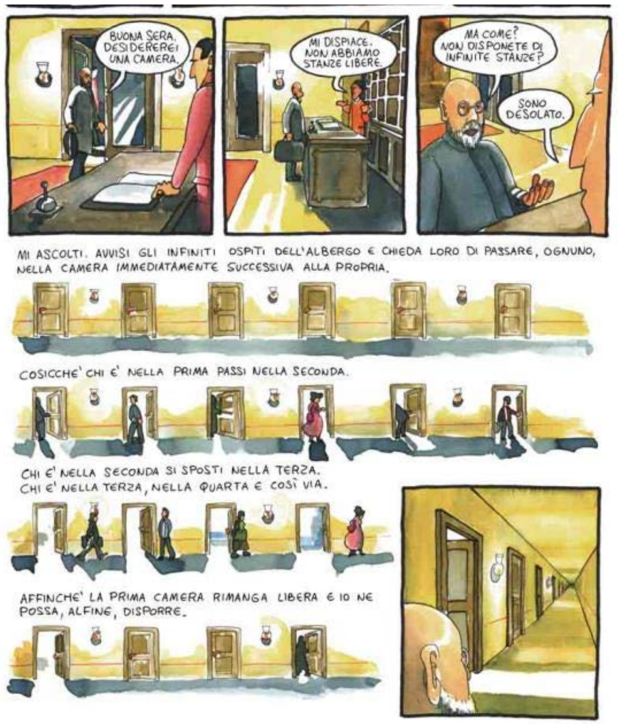


Stranezze aritmetiche: $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$, $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, …

Ma in definitiva *"dal Paradiso che Cantor ha creato per noi nessun deve poterci mai cacciare"* (almeno secondo Hilbert, *Sull'infinito*, 1925)

La definizione di ***infinito secondo Dedekind***: un insieme è infinito se si può mettere in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria.





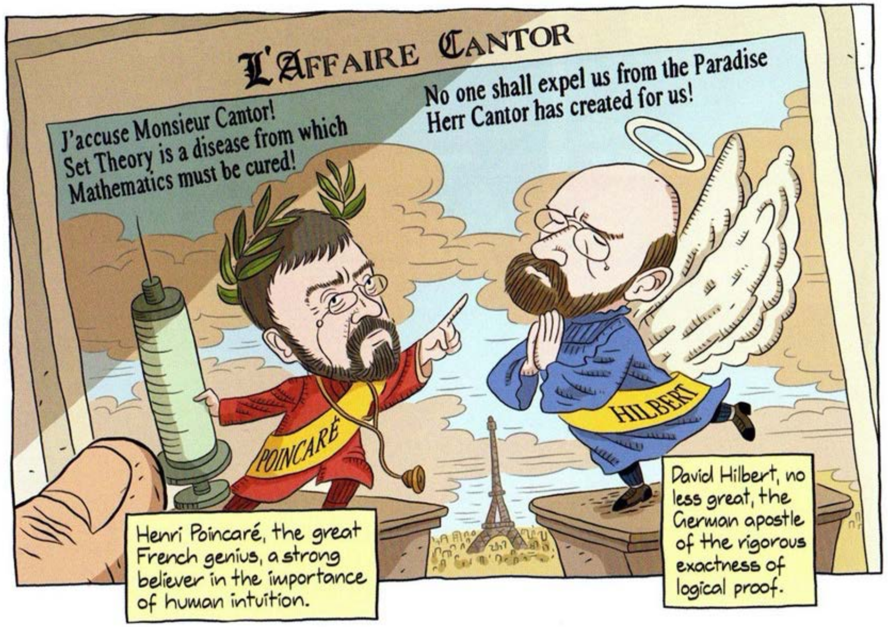
L'albergo di Hilbert. David Hilbert, lezione del 1924

«Supponiamo ora che l'albergo abbia un numero infinito di camere numerate 1, 2, 3, 4, 5, ..., in ognuna delle quali vi è un ospite. Appena un nuovo ospite sopraggiunge, il proprietario deve solo spostare ciascuno dei vecchi ospiti nella stanza con il numero immediatamente successivo e la camera 1 è libera per il nuovo arrivato.»

«[…] in un mondo con un numero infinito di case non ci sarebbe carenza di alloggi. Allo stesso modo, in una compagnia di danza con infiniti ballerini, se tutti sono impegnati e arriva una nuova signora, l'organizzatore del ballo può facilmente abbinarla e non rimarrà senza un partner. Si può anche sistemare un numero infinito di nuovi ospiti dell'albergo: ciascuno dei vecchi ospiti, che originariamente occupavano la stanza con il numero n, farà riferimento alla stanza con il numero 2n, liberando così le infinite stanze con numeri dispari per i nuovi ospiti»

L’***insieme*** come concetto unificante della matematica. Una novità.

- discussa,
- elogiata da alcuni (Hilbert),
- criticata e disprezzata da altri (Poincaré).



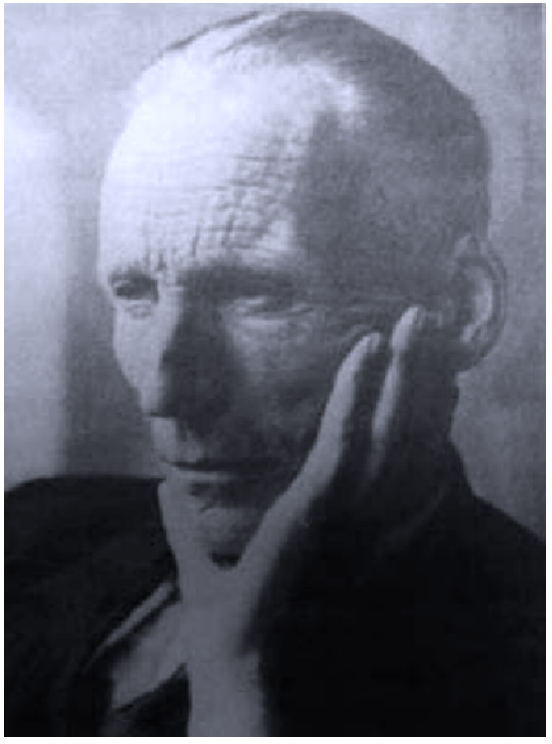
Poincaré, 1908: *“Per conto mio io penso, e non sono il solo, che l’importante è di non introdurre mai che delle entità che si possano definire completamente con un numero finito di parole”*

Parentesi: Luitzen Brouwer (1881-1966) e l'***intuizionismo***

- Rifiuto del formalismo
- Rifiuto dell'infinito attuale
- Rifiuto del principio del terzo escluso (dunque, di dimostrazioni per assurdo)

Un oggetto matematico esiste se e solo se si costruisce

L'ambito ***naturale***: 0, 1, 2, 3, … (solo potenzialmente infinito)



Qualche assaggio

1) Sia $X = \{x : \ x = 1 \vee (x = 2 \wedge \text{vale la congettura di Goldbach})\}$.

Viene da dire: X è finito perché sottoinsieme di $\{1, 2\}$, a prescindere dalla congettura di Goldbach. Ma nella logica intuizionista per chiarire la natura di X bisogna rispondere alla congettura di Goldbach.

2) Ogni funzione dai reali nei reali (intuizionisti!) è continua.

Esempio classico di funzione discontinua in ogni punto reale: la funzione caratteristica f dei numeri razionali (***funzione di Dirichlet***) che a ogni reale x associa

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Ma nel mondo intuizionista f non è una funzione perché non si sanno distinguere i razionali dagli irrazionali.

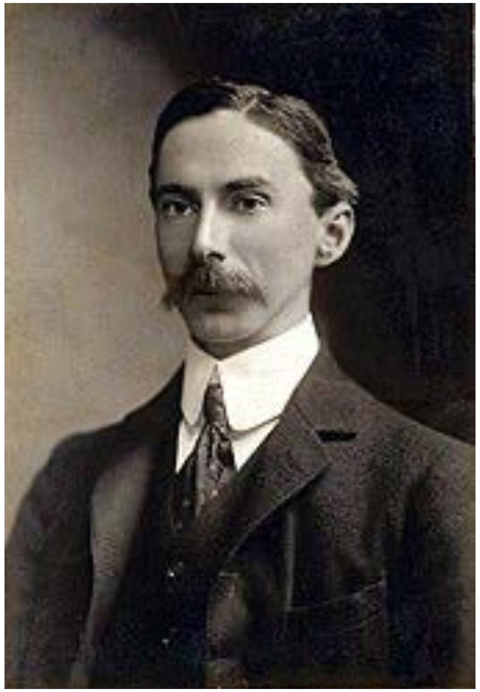
Il concetto di insieme

- da definire o assiomatizzare
- e poi da raffinare e approfondire (unioni, insieme delle parti, …).

Principio di comprensione (Gottlob Frege, 1879). Ogni proprietà definisce un insieme (quello degli elementi che soddisfano quella proprietà).

Paradossi

- ***Cantor*** (1897-1899). L’unione U di tutti gli insiemi è l’insieme più “grande”, dunque di cardinalità massima. Ma l’insieme dei sottoinsiemi di U ha cardinalità ancora maggior.
- ***Russell*** (lettera a Frege, 1901-02). Consideriamo la proprietà di un insieme di non appartenersi. Col principio di comprensione si forma l’insieme V degli insiemi che non si appartengono. Ma V si appartiene se e solo se non si appartiene.



La reazione ai paradossi

- i sarcasmi contro la teoria degli insiemi
- l'invito di Hilbert a Ernst Zermelo (1871-1953) per un approccio assiomatico rigoroso alla teoria degli insiemi

Il pensiero di Hilbert

- la matematica può sostenersi da sola, anche quando tratta di infinito
- deve organizzarsi in sistemi deduttivi (per la geometria, l'aritmetica, i numeri reali, l'infinito), tutti con i loro ***assiomi*** e ***teoremi***.

Le differenze da Euclide

- gli oggetti matematici (compresi quelli geometrici!) come puri ***simboli*** astratti, su cui operare con un calcolo ***formale***
- l'importanza della ***dimostrazione***, basata su ***regole di deduzione*** precise e prestabilite
- il chiarimento del concetto stesso di ***dimostrazione*** (una sequenza finita di passaggi che dall'ipotesi conducono alla tesi tramite l'applicazione delle regole di deduzione).

Una matematica aristocratica, che si affida al ragionamento, ad ***astrazione e rigore***… e tuttavia un'anticipazione della moderna programmazione informatica.

Ax. 1.	$(P(\varphi) \wedge \Box \forall x(\varphi(x) \Rightarrow \psi(x))) \Rightarrow P(\psi)$
Ax. 2.	$P(\neg\varphi) \Leftrightarrow \neg P(\varphi)$
Th. 1.	$P(\varphi) \Rightarrow \Diamond \exists x\, \varphi(x)$
Df. 1.	$G(x) \Leftrightarrow \forall\varphi(P(\varphi) \Rightarrow \varphi(x))$
Ax. 3.	$P(G)$
Th. 2.	$\Diamond \exists x\, G(x)$
Df. 2.	$\varphi \text{ ess } x \Leftrightarrow \varphi(x) \wedge \forall\psi\,(\psi(x) \Rightarrow \Box \forall y(\varphi(y) \Rightarrow \psi(y)))$
Ax. 4.	$P(\varphi) \Rightarrow \Box P(\varphi)$
Th. 3.	$G(x) \Rightarrow G \text{ ess } x$
Df. 3.	$E(x) \Leftrightarrow \forall\varphi(\varphi \text{ ess } x \Rightarrow \Box \exists y\, \varphi(y))$
Ax. 5.	$P(E)$
Th. 4.	$\Box \exists x\, G(x)$

Soprattutto: a sostegno di un sistema deduttivo non più, come in Euclide, l'***evidenza*** (che è ingannevole in geometria, inconsistente all'infinito), ma

- la ***coerenza*** (assenza autocertificata di contraddizioni)
- la ***completezza*** (capacità di fare luce).

Anche importante l'***indipendenza*** degli assiomi (scarni, essenziali, privi di ridondanze)

L'ambizione

$$\textbf{\textit{vero}} \Leftrightarrow \textbf{\textit{dimostrabile}}$$

Ma il rapporto si ribalta rispetto a Euclide

- non più ***dimostrabile perché vero*** (cioè evidente),
- ma ***vero perché dimostrabile***

Gilbert K. Chesterton, 1905, contributo a Daily News
"Riassumendo, si può trovare la verità con la logica solo se si è già trovato la verità senza". o viceversa?

"Questa non è matematica, questa è teologia" (Paul Gordan?)

La teoria degli insiemi ZF di Zermelo-Fraenkel (1922)

I paradossi di Cantor e Russell sono sostanzialmente superati e risolti una assiomatizzazione più attenta, consapevole dei rischi da essi manifestati

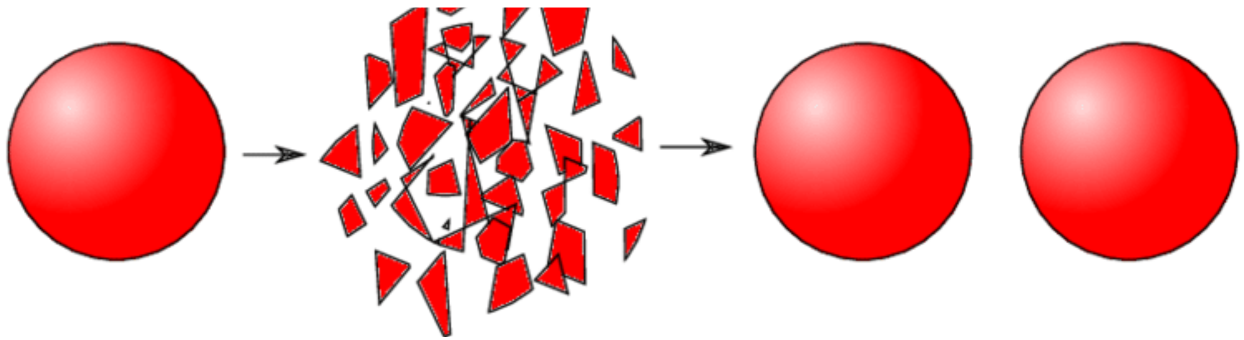
- Assioma dell'***infinito***, assioma dell'insieme delle parti, assioma dell'unione (sotto opportune condizioni), …
- Assiomi "negativi": le collezioni di oggetti U e V nei paradossi di Cantor e Russell (l'unione di tutti gli insiemi, la collezione di tutti gli insiemi) non sono insiemi

Un primo "assioma" delicato, che compare e scompare nei sistemi elaborati da Zermelo fino a ZF

Assioma della scelta (CA). Se F è un insieme di insiemi non vuoti, ***esiste*** una funzione che a ognuno di questi insiemi associa un suo elemento.

Zermelo (1904): *"da applicare senza esitazione"*. Ma come ***costruire*** questa funzione? Inoltre altre formulazioni equivalenti del principio sono assai meno convincenti e intuitive. Anzi, usando CA insieme a ZF, si arriva a:

Paradosso di Banach-Tarski, Stefan Banach (1892-1945) e Alfred Tarski (1902-1983). È possibile suddividere una sfera in un numero finito di parti che, ricomposte, formano due sfere uguali a quella di partenza.



ZFC = ZF con l'assioma della scelta.

Una seconda affermazione controversa:

Ipotesi del continuo (CH). Qualunque sottoinsieme infinito dell'insieme dei reali è in corrispondenza biunivoca o con i numeri naturali o con i numeri reali.

$$\boxed{2^{\aleph_0} = \aleph_1}$$

Come dire: nessuna cardinalità "intermedia" tra il numerabile e il continuo!

I tentativi di risolvere il problema del continuo…

- Cantor pone la questione nel 1878 e cerca inutilmente di risponderle
- Altri tentativi di provare o contraddire CH (prima e dopo ZF e ZFC)
- Il primo problema di Hilbert (1900)

CA sulla base di ZF

- impossibile da confutare (Gödel, 1938)
- impossibile da dimostrare (Cohen, 1963)

CH sulla base di ZFC

- impossibile da confutare (Gödel, 1938)
- impossibile da dimostrare (Cohen, 1963)

CA come CH: solo (pirandellianamente) *“colei che la si crede”*?

- Kurt Gödel (1906-1978) e l’universo costruibile
- Paul Cohen (1934-2007) e la tecnica del forcing; medaglia Fields nel 1966

Le conclusioni su ZF rispetto ai criteri stabiliti da Hilbert per riconoscere un buon sistema deduttiva

- certamente incompleto,
- chissà se coerente

Idem per ZFC.

$\forall x \forall y (x = y \leftrightarrow \forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y))$	(Extensionality)
$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w = y \vee w = z)$	(Pair)
$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w \in x (z \in w))$	(Union)
$\exists x \forall y (y \notin x)$	(Empty Set)
$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \to y \cup \{y\} \in x))$	(Infinity)
$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z)))$	(Separation)
$\forall x (\forall y \in x \exists z \varphi(y, z) \to \exists w \forall y \in x \exists z \in w \varphi(y, z))$	(Collection)
$\forall x (\forall y \in x \exists ! z \varphi(y, z) \to \exists w \forall y \in x \exists z \in w \varphi(y, z))$	(Replacement)
$\forall x (\forall y \in x \exists z \varphi(y, z) \to \exists w (\forall y \in x \exists z \in w \varphi(y, z) \wedge \forall z \in w \exists y \in x \varphi(y, z))$	(Strong Collection)
$\forall x \exists y \forall w (w \in y \leftrightarrow w \subseteq x)$	(Power Set)
$\forall x \forall y \exists z \forall w (\forall a \in x \exists b \in y \varphi(a, b, w) \to \exists c \in z (\forall a \in x \exists b \in c \varphi(a, b, w) \wedge \forall b \in c \exists a \in x \varphi(a, b, w)))$	(Subset Collection)
$\forall x \forall y \exists z (\text{'}z \text{ is full in } x \text{ and } y\text{'})$	(Fullness)
$(\forall x (\forall y \in x \varphi(y)) \to \varphi(x)) \to (\forall x \varphi(x))$	($\in$-induction)
$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow \text{'}w \text{ is a function } x \to y\text{'})$	(Exponentiation)
$\exists x [(\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \to y \cup \{y\} \in x)) \wedge (\forall z (\emptyset \in z \wedge \forall y (y \in z \to y \cup \{y\} \in z)) \to x \subseteq z)]$	(Strong Infinity)
$\forall x [(\forall y (y \in x \to \exists z (z \in y))) \to \exists f : x \to \bigcup x \, f(x) \in x]$	(Axiom of Choice)

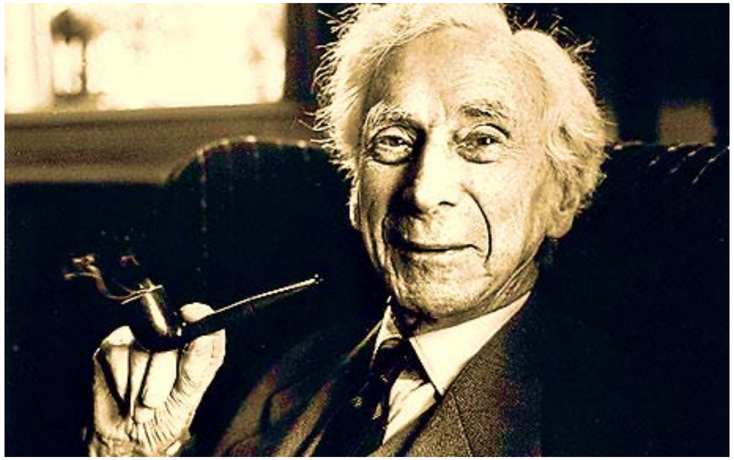
C’è di peggio…

Primo teorema di incompletezza di Gödel (1930-31). Qualunque sistema deduttivo che

- tratta almeno l'aritmetica dei numeri naturali,
- è "umanamente" accessibile,
- è coerente

è conseguentemente incompleto.

In questi sistemi, proposizioni di aritmetica ***indecidibili*** (né dimostrabili né confutabili) e quindi proposizioni vere e indimostrabili.



Bertrand Russell, *Misticismo e logica*, *La matematica e i metafisici*
"La matematica (pura) può essere definita come la materia nella quale non sappiamo mai di che cosa stiamo parlando, né se ***ciò che stiamo dicendo è vero****"*.

Oggi la matematica è diventata grande?

- È certamente cambiata e meno ideale (non serve attardarsi su troppi "sofismi")
- L'informatica sembra reclamare un ambito discreto (sia pure di "grandi" numeri) piuttosto che continuo e un approccio algoritmico (costruttivo)
- Tuttavia i fenomeni di indipendenza e indecidibilità arricchiscono la matematica e ne ampliano il fascino
- Verso assiomi più potenti (grandi numeri, forcing)?
- Altri concetti unificanti oltre gli insiemi?

Ted Chiang, *Divisione per zero*, 1991
L'autore è famoso per l'altro racconto *Storia della tua vita* (da cui il film *Arrival*, 2016)

La storia lacerante di una matematica di genio che

- si convince d'aver scoperto l'incoerenza della matematica,
- va di conseguenza in depressione fino a tentare il suicidio.

Matematica incoerente? Un'ipotesi implausibile ma inquietante